Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования

«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»

Институт информационных технологий

Лабораторная работа №2

«Алгоритмы цифровой обработки сигналов в частотной области»

по дисциплине «Цифровая обработка сигналов»

Вариант №6

Выполнил: студент гр. 981064 Ефименко Павел Викторович

Проверил: Митюхин А. И.

Минск 2021

Тема работы: Алгоритмы цифровой обработки сигналов во временной области

Цель работы:овладение общими методами цифровой обработки сигналов; овладение математическими алгоритмами цифровой обработки сигналов, используемыми в информационных системах и сетях; изучение свойств дискретного преобразования Фурье и применения их в цифровой обработке сигналов и изображений; овладение методами решения конкретных реальных задач из отдельных разделов цифровой обработки сигналов.

Выполнение работы

* + 1. Вычислить значения ДЭФ: при .

Дискретной комплексной экспоненциальной функцией называется функция вида:

– шаг комплексного вектора.

– дискретное время.

– частотный индекс.

– поворачивающий множитель.

Величина фазы вектора ДЭФ за дискретное время 𝑛 определяется по формуле

Для , - вычисляется по формуле

* + 1. Функции системы ДЭФ записать в виде матрицы V размерностью 8 × 8.

Систему ДЭФ записывают в виде матрицы V, строки которой нумеруются переменной 𝑘, столбцы переменной 𝑛. В пересечении k -й строки и n -го столбца записывается величина

Пусть период N = 8. Матрица V имеет вид

Функция ДЭФ отвечает свойству периодичности. Матрицу V, можно упростить, если вычисления производить по формуле

Подставив в матрицу числовые значения степенного ряда , получим

* + 1. Привести на примерах вычисления подтверждающие свойства ДЭФ.

Свойства функций ДЭФ

1. Периодичность.

Рассмотрим функцию ДЭФ вида

l – любое целое число,

N – период.

Составляющая функции равна единице,

Функция ДЭФ отвечает свойству периодичности. Матрицу V, можно упростить, если вычисления производить по формуле

1. Ортогональность. Так как , то функции ортогональны, т.е.

Следствием свойства ортогональности является:

* скалярное произведение различных двух строк матрицы 𝐕, одна из которых должна быть комплексно-сопряженной, равно нулю;
* скалярное произведение одинаковых двух строк матрицы 𝐕, одна из которых должна быть комплексно-сопряженной, равно 𝑁.

Действительно,

Сумма 𝑁 единиц в формуле выше даст число 𝑁. Матричная запись свойства ортогональности имеет вид

I – единичная матрица.

1. Симметричность. ДЭФ является функцией двух переменных 𝑘 и 𝑛. Выводы относительно одной из переменных справедливы и для другой. Тогда
   * 1. Вычислить спектр сигнала  с помощью ДПФ. Построить графики амплитудного и фазового спектров.

Под спектром сигнала понимают совокупность его гармонических составляющих.

Комплексный спектр сигнала вычисляется по формуле

и

соответственно, векторы-столбцы отсчетов спектральных коэффициентов и сигнала

*Пример вычисления:*

– коэффициенты амплитудного спектра Фурье.

– модуль комплексных чисел.

Амплитудная характеристика рассчитывается по формуле:

Амплитудные коэффициенты рассчитываются по формуле:

Фазовая характеристика рассчитывается по формуле:

* + 1. По полученным значениям ДПФ с помощью ОДПФ восстановить исходные значения отсчетов сигнала. Построить график восстановленного сигнала.

Обратное ДПФ вычисляется по формуле:

Подставим значения в формулу для нахождения исходных значений отсчётов сигнала:

* + 1. С помощью ДПФ вычислить периодическую свертку последовательностей и . Построить график свертки.

Вычислить свертку векторов X, H, используя теорему о свертке

Вычисляем поэлементное умножение спектров X и H для нахождения спектра свертки.

Выполняем ОДПФ от спектра свертки:

* + 1. С помощью ДПФ вычислить ВКФ периодических последовательностей и . Построить график ВКФ.

Найдём в матричной форме ДПФ последовательностей и

Выполним поэлементное умножение спектров X и H для нахождения спектра корреляции. При этом следует записать вектор X в комплексном сопряжении.

– спектр корреляции.

Выполняем ОДПФ от спектра R

* + 1. С помощью ДПФ вычислить АКФ периодической последовательности . Построить график АКФ.

Выполним поэлементное умножение спектров и для нахождения спектра корреляции. При этом следует записать вектор X в комплексном сопряжении.

Выполняем ОДПФ от спектра R

* + 1. Используя исходные данные (п. 4.2.4), провести вычисления, подтверждающие теорему Парсеваля

Из пункта 4.2.4

Используя теорему Парсеваля, найдём энергию сигнала в частотной области

Возьмём спектр свёртки из примера выше

r (0) = r (0) = 8

**Вывод:** в результате выполнения лабораторной работы изучил свойства дискретного преобразования Фурье и применения их в цифровой обработке сигналов и изображений; – овладел методами решения конкретных реальных задач из отдельных разделов цифровой обработки сигналов.

**Контрольные вопросы**

6.1. При каких условиях возможно представление непрерывного сигнала его дискретными значениями?

При условии, что сигнал является детерминированным, а не случайным.

Детерминированным называется сигнал, значение которого в любой момент времени может быть точно определено

6.2. Поясните понятие линейная система.

**Линейная система** — любая система, для которой отклик системы на сумму воздействий равен сумме откликов на каждое воздействие.

Линейная дискретная система (ЛДС) определяется как однозначное преобразование или оператор, переводящий входную последовательность – вход) в последовательность – выход. Говорят, – это отклик или реакция системы на входное воздействие . Математически это записывается как

6.3. Поясните понятие импульсная характеристика линейной системы.

Импульсной характеристикой линейной системы называется её реакция на входной сигнал в виде единичного импульса δ[n] при нулевых начальных условиях.

6.4. Поясните различия операций свертка и корреляция.

Корреляционная функция ‒ это показатель сходства или общих линейных свойств двух сигналов. Значение 𝑟(𝑡) = 0 указывает на нулевую корреляцию.

Это означает, что сигналы независимы, например, если один из сигналов случаен. Малые значения 𝑟(𝜏) указывают на незначительную корреляцию.

Если 𝑦(𝑛) последовательность, значения которой зависят от отсчетов двух последовательностей ℎ(𝑛) и 𝑥(𝑛) и определяется выражением, то говорят, что 𝑦(𝑛) есть свертка. Обозначение операции свертка

6.5. Что выражает корреляционная функция (АКФ, ВКФ)?

Взаимно корреляционная функция — стандартный метод оценки степени корреляции двух последовательностей. Она часто используется для поиска в длинной последовательности более короткой заранее известной. Рассмотрим два ряда f и g.

Автокорреляционная функция — это характеристика сигнала, которая помогает находить повторяющиеся участки сигнала или определять несущую частоту сигнала, скрытую из-за наложений шума и колебаний на других частотах. Автокорреляционная функция часто используется в обработке сигналов и анализе временных рядов.

6.6. Поясните понятие разложение сигнала в ряд Фурье.

Ряд Фурье описывает то, что любой сложный периодический сигнал может быть представлен в виде суммы гармонических колебаний с частотами, кратными основной частоте.

6.7. Поясните различия комплексной экспоненциальной функции, дискретной комплексной экспоненциальной функции и конечной дискретной комплексной экспоненциальной функции.

6.8. Поясните свойства ДЭФ.

**Свойства функций ДЭФ**

1. **Периодичность.**

Рассмотрим функцию ДЭФ вида

**l** – любое целое число,

**N** – период.

Составляющая функции равна единице,

Функция ДЭФ отвечает свойству периодичности. Матрицу V, можно упростить, если вычисления производить по формуле

1. **Ортогональность. Так как , то функции**  ортогональны, т.е.

Следствием свойства ортогональности является:

* скалярное произведение различных двух строк матрицы 𝐕, одна из которых должна быть комплексно-сопряженной, равно нулю;
* скалярное произведение одинаковых двух строк матрицы 𝐕, одна из которых должна быть комплексно-сопряженной, равно 𝑁.

Действительно,

Сумма 𝑁 единиц в формуле выше даст число 𝑁. Матричная запись свойства ортогональности имеет вид

**I** – единичная матрица.

1. **Симметричность.** ДЭФ является функцией двух переменных 𝑘 и 𝑛. Выводы относительно одной из переменных справедливы и для другой. Тогда

6.9. Поясните различия ряда Фурье, преобразования Фурье, дискретизированного по времени преобразования Фурье и дискретного преобразования Фурье.

Дискретное преобразование Фурье (ДПФ) устанавливает связь между временным и частотным представлением сигнала при разложении его по конечным дискретным экспоненциальным функциям.

Прямое дискретное преобразование Фурье (ПДПФ) последовательности 𝑥(𝑛) определяет дискретную последовательность 𝑋(𝑘) в частотной области

6.10. Поясните свойства ДПФ.

Свойства ДПФ:

* Линейность
* Сдвиг по времени
* Периодичность
* Выполняется Теорема Парсеваля.
* Обладает спектральной плотностью

6.11. Поясните понятие спектр сигнала.

Под спектром сигнала понимают совокупность его гармонических составляющих (амплитуд, фаз, частот).

6.12. Поясните метод спектрального анализа.

Любой сигнал как функцию времени математически можно альтернативным способом представить зависимостью амплитуды от частоты и зависимостью фазы от частоты, т. е. амплитудным и фазовым спектрами. С помощью анализа Фурье сигналы представляются суммой гармонических (синусоидальных) сигналов, каждый из которых характеризуется своей частотой, амплитудой и начальной фазой. Спектр дает информацию о частотном содержании сигнала. Амплитудный и фазовый спектры часто дают больше полезной информации, чем форма сигнала

Применение нормированных частот позволяет производить спектральный анализ, синтез цифровых фильтров и пр. в единой полосе частот. Для ЦОС важны не абсолютные значения частоты сигнала и частоты дискретизации, а их отношение, т. е. значение нормированной частоты.

Спектральный анализ – это раздел математики, который изучает представления функций в виде тригонометрических рядов Фурье и интегралов. Основным понятием в спектральном анализе является гармоническое колебание.

6.13. Поясните, как реализовать синтез сигналов с помощью ДПФ.

Данные спектрального анализа позволяют произвести синтез сигнала.

Операция формирования сложного сигнала из набора гармоник называется синтезом сигнала. На практике для синтеза сигналов обычно используют не бесконечный ряд, а ограниченный набор гармоник (его называют усеченным рядом Фурье). Понятно, что если сигнал будет представлен неполным набором гармоник, его форма будет искажена. Одной из задач синтеза сигналов является формирование сигналов с допустимыми искажениями из ограниченного набора гармоник.

В качестве примера рассмотрим формирование сигнала, близкого к прямоугольному, из усеченного ряда Фурье. На рисунке 4.6 представлены сигналы, полученные суммированием первых гармоник, выбранных из полного ряда Фурье. На рисунке 1, а пунктиром изображен меандр (симметричный прямоугольный сигнал) m(t), сплошной линией - уровень первой гармоники a1(t), содержащейся в этом сигнале. На рисунке 1, б изображен спектр первой гармоники s1(f). Спектр гармонического (синусоидального) колебания содержит только одну составляющую на частоте f = f1 = 1/Т, где Т - период колебаний. Периоды исходного прямоугольного сигнала и его первой гармоники совпадают.

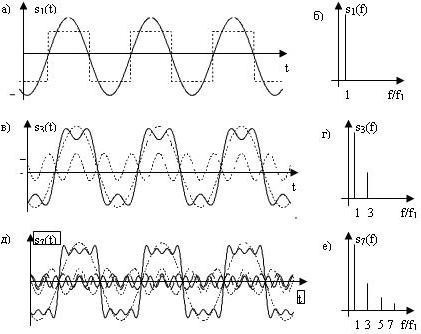


Рисунок 1

На рисунке 1, в пунктиром изображены первая и третья гармоники, а сплошной линией - их сумма. Заметим, что у симметричных сигналов (в том числе и у меандра) все гармоники с четными номерами отсутствуют (точнее, их значения равны нулю). Спектры первых трех гармоник приведены на рисунке 1, г (уровень второй гармоники равен нулю). На рисунке 1, д приведены первые четыре ненулевые гармоники (то есть гармоники с номерами 1, 3, 5 и 7) и их сумма. На рисунке 1, е показаны их спектры.

На рисунке видно, что с увеличением количества гармоник форма синтезированного сигнала все более приближается к прямоугольной, а различие между прямоугольной волной и сигналом, образованным суммой гармонических составляющих, становится все меньше.